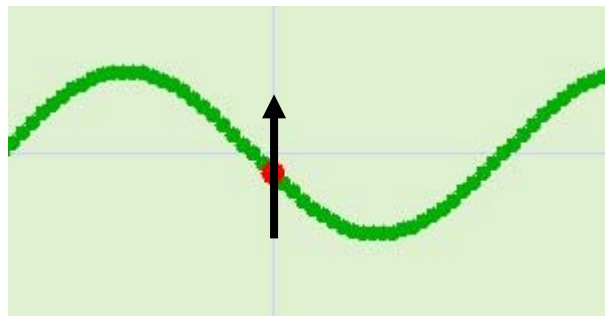


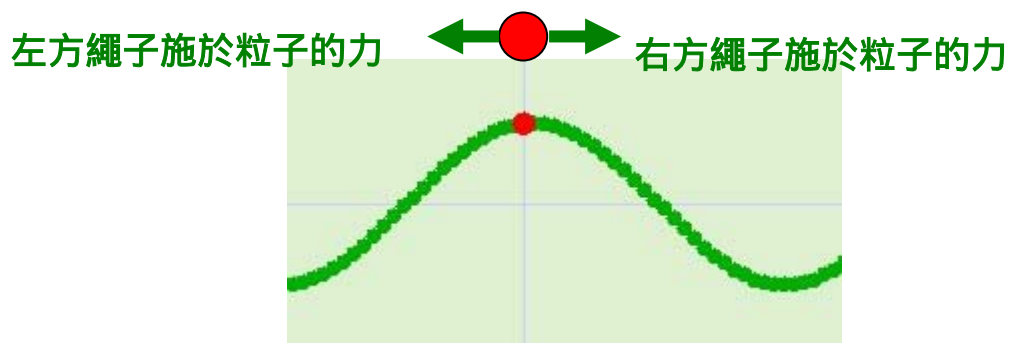
波動與簡諧

粒子進行簡諧運動，當位移最大時，粒子所受的淨力的量值(magnitude)也應該最大。

下圖是抖動一根繩子所造成的橫波。橫行波上的粒子會隨波動而作簡諧運動 (simple harmonic motion)。 粒子從那裡得到簡諧運動所需的力？答案是繩子的張力，不是重量（試想在沒有重量情況下，仍然可產生繩上的橫波）。



奇怪是，當粒子處於離開平衡位置最遠距離(波峰或波谷)時，粒子左、右的繩子都是水平，即是施於粒子是兩個互相抵消的水平力。



淨力是零，那又何來 SHM 所要求的一個指向平衡點的最大回復力 (restoring force) ?

這問題的關鍵是簡諧運動的定義。

嚴格在說，簡諧運動的定義是 $a \propto -x$ ，不是 $F \propto -x$ 。

因為 $a \propto -x$ ，那才求得 $x = A\cos(\omega t + \phi)$ 的通解。

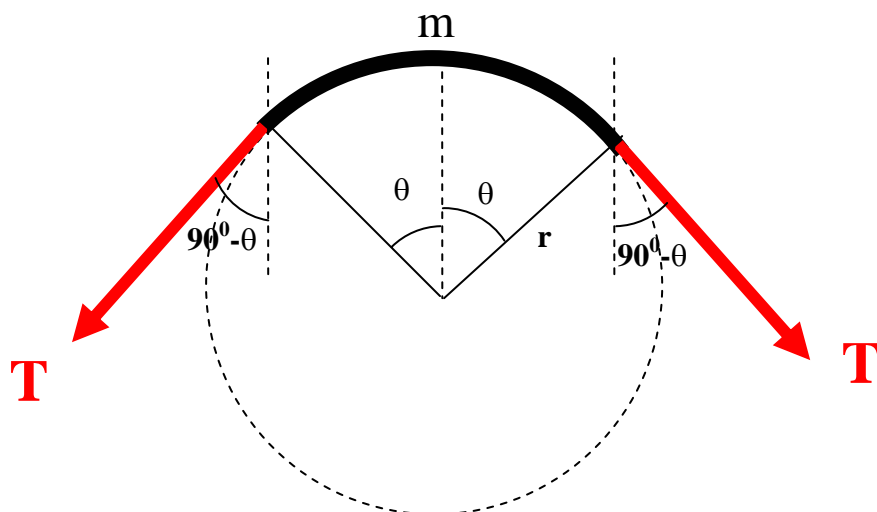
一般情況， $a \propto -x$ 和 $F \propto -x$ 是同義的。但在這問題，就有分別。

波峰上的一點，它左、右的張力的確抵消，但該粒子的質量也是零。

$a = F/m$ 。零除零，答案不一定是零！也不一定是一個小值！

正確的分析是先設粒子有一定大小，那時左、右方的張力就不會完全水平。把 F/m 的 $m \rightarrow 0$ ，就可求得粒子的加速。

下圖的 r 是波峰一段的曲率半徑。 T 是繩子的張力。 m 是繩子在波峰一段的質量。



施於 m 的淨力是 $F = 2T\cos(90^\circ - \theta) = 2T \sin\theta$ 。

m 的質量是 $\rho r(2\theta)$ ，其中 ρ 是繩子的每單位長度的質量。

(1) 若 $\theta \rightarrow 0$ ， $F \rightarrow 0$ 及 $m \rightarrow 0$ 。

(2) 但 $a = \frac{F}{m} = \frac{2T \sin \theta}{2\rho r \theta} = \frac{T \sin \theta}{\rho r \theta}$ 。

若 $\theta \rightarrow 0$ ， a 不是趨向零。

因為 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ，所以 $\theta \rightarrow 0$ ， $a \rightarrow \frac{T}{\rho r}$ 。

即是波峰上粒子所受的力是零，但加速度不是零。

(3) 嚴格數學可證明在任何時刻，粒子 m 的加速度是 $a \propto -x$ 。

吳老師 (Chiu-king NG)