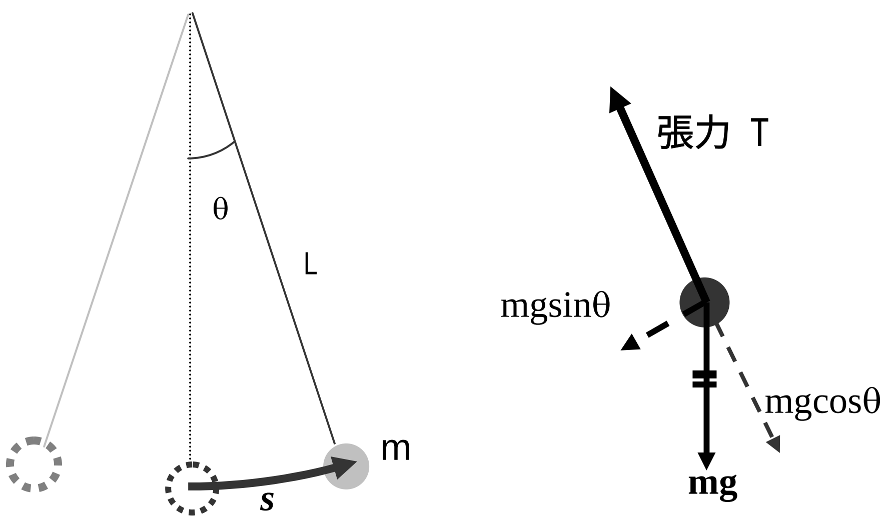
單擺是簡諧的兩個推導

高中同學都知道單擺 (simple pendulum) 在小振幅下屬於簡諧運動(simple harmonic motion) 。本文比較它的兩個推導。

方法一



向心淨力用於圓周運動，所以 $T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{r}$

擺錘沿弧 s 擺動，切向（tangential）淨力是 mgsinθ，指向平衡點。

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad \text{................(1)}$$

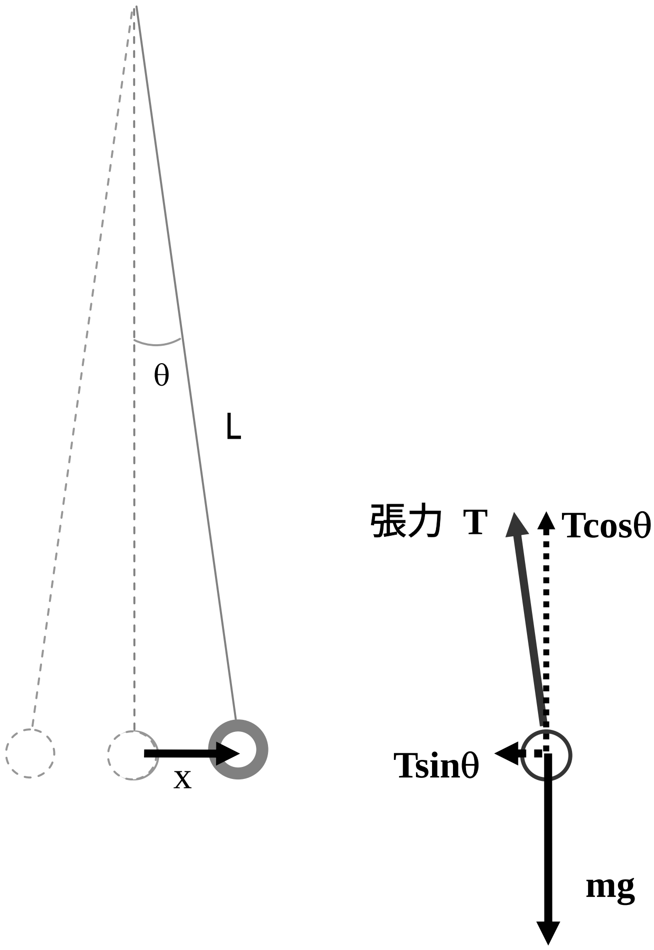
若 θ 細小， $\sin\theta \approx \theta = \dfrac{s}{L}$ ....(2)

利用（2），（1）變成 $-\dfrac{g}{L}s = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ .... (3)

式（3）証明擺錘在小振幅下沿弧 s 擺動是簡諧運動，其角頻率是 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$。

以上証明常見於中學書本。

方法二：



擺錘在垂直方向沒有運動，所以垂直方向沒有淨力：

$$T\cos\theta = mg \quad \textbf{.........(4)}$$

擺錘在水平方的淨力是 Tsinθ，方向是指向中間平衡點。

$$-T\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad ....(5)$$

$(5)\div(4)$，得 $$-T\tan\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad ....(6)$$

若 θ 細小， $$\tan\theta \approx \theta = \frac{s}{L} \quad ....(7)$$

利用（7），（6）變成 $-\frac{g}{L}x=\frac{d^2x}{dt^2}$ ………… （8）

式（8）証明擺錘在小振幅下沿水平擺動是簡諧運動，其角頻率是 $\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$。

兩方法之比較：

	方法一	方法二
平衡點	中間最低位置	中間最低位置
擺動方向	以繩的懸掛點為中心的弧	水平方向
力平衡方向	沒有	垂直方向
張力與重量關係	$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{r}$ 在最高點， $T=mg\cos\theta$	任何時刻， $T\cos\theta=mg$
有否作圓周運動？	有	沒有
假設	$\sin\theta\approx\theta$	y 方向沒有淨力和 $\tan\theta\approx\theta$

- 「方法一」是標準方法。某教科書作者宣稱「方法二」不正確，是 **”wrong concept”**。
- 的而且確，「方法一」看來較合理，與「圓周運動」課堂所學的概念配合。
- 公開考試以「方法一」為標準答案。 若同學寫了「方法二」的推導，後果不堪！

「方法二」是否真是 **wrong concept**？

首先，我們要弄清楚一個概念。

很多時候，物理學方程不容易解，不容易求得一個完全精確解 **(exact solution)** 。那時，物理學家就會利用一些有效的近似，把方程簡化，然後來求得一個近似的解。近似的解與真正的解有多「近似」？ 物理學家用一個數學術語來說明：「這個解只是 **correct to … order**」。甚麼意思？ 試以三角比為例，

原來 **sin**θ、**cos**θ 和 **tan**θ (θ是弧度) 有以下的展開式：

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ... \qquad \textbf{(9)}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ... \qquad \textbf{(10)}$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \frac{17\theta^7}{315} + ... \qquad \textbf{(11)}$$

以上是無限項 series。無限項加起的值是百份百左邊三角比的值。

當 θ 很小時，$\theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, ...$ 的值就會隨 θ 的指數越來越大而變得越來越小。

若把方程內三個比展開式中的 θ^2 和更高指數的項通通捨去，那時解出的答案當然不是 **exact solution**，我們只可說這方程的解只是準確至 θ 的一階 **(correct to the first order of** θ**)** 。同理，方程中保留了 θ 和 θ^2 下的解就會準確至 θ 的二階 **(correct to the second order of** θ**)** 。

「方法一」和「方法二」分別得出的運動方程 $-\frac{g}{L}s=\frac{d^2s}{dt^2}$ 和 $-\frac{g}{L}x=\frac{d^2x}{dt^2}$ 都是做了近似。大家都不是完全準確，前者的準確程度限於 **correct to the second order of** θ，後者則限於 **correct to the first order of** θ。

方法一：徑向（radial）的向心淨力用於圓周運動，切向（tangential）的淨力用於簡諧運動。

此方法在推導公式時，只用了 $\sin\theta\approx\theta$。從式（9），知道這近似等同於把公式的 θ^3 和以上的高階項捨去。 即是這方法得到的運動圖像可準確至 θ 的二階 (**correct to second order**) 。

方法二：垂直方向沒有淨力，水平方向的淨力用於簡諧運動。

此方法在推導公式時只保留 θ 的一階 (**first order**)，即是公式中所有高於 θ 一階的項全被捨去。在這準確程度下，向心加速也可忽略。

向心加速 $\propto v^2$。因為 $v\propto\theta$，所以向心加速是 θ 的二階項 (**second order term**) 。把 θ^2 和以上的項捨去時，向心加速亦隨之捨去。

把 θ^2 和以上的項捨去時，$\cos\theta\approx1$，$T=mg\cos\theta$，$T=\frac{mg}{\cos\theta}$ 都是正確，是真的「垂直方向的力互相抵消」。

結語：

1. $-\frac{g}{L}s=\frac{d^2s}{dt^2}$ 和 $-\frac{g}{L}x=\frac{d^2x}{dt^2}$ 都是取了近似後的方程，分別只是前者比後者做了好一些的近似。前者是準確至θ 的二階，而後者只是準確至θ 的一階。

2. 不能說「方法二」是 **wrong concept**。如此準確程度的方程解在物理學比比皆是。

吳老師 (Chiu-king NG)