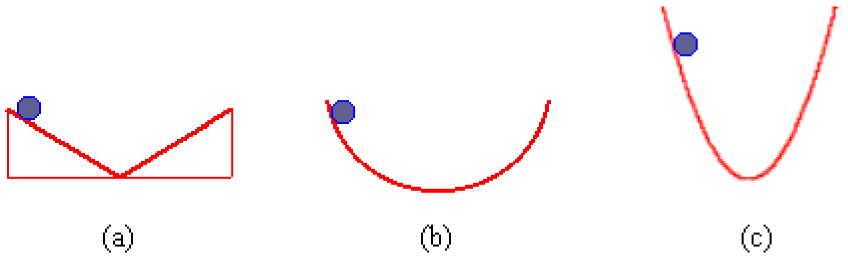
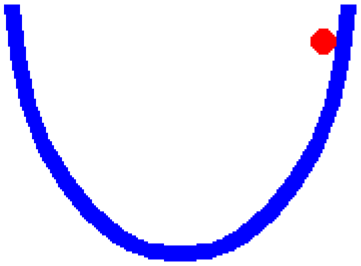
問題：



上圖的所有路軌均為平滑無摩擦。粒子在圖 (a) 的斜板上來回走動，這不是簡諧運動。粒子在圖 (b) 的半圓軌上來回走動，只當小振幅時才近似是簡諧運動。圖 (c) 是一條拋物形路軌，公式是 $y = kx^2$。粒子在其上來回走動，引力勢能是 $m\,g\,y$，即是 **PE** $= m\,g\,y = mg(kx^2) = mgkx^2$ 。 若把此式和 **SHM** 的勢能 **PE** $= \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 比較，發覺形式相同。 這是否粒子在 **(c)** 的運動就是簡諧 (不論振幅大小)，且 $\omega^2 = 2gk$?

解答及分析：

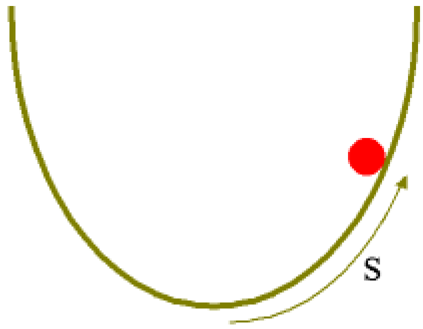
1.



無論曲線是甚麼數學形式，粒子在其上受地心吸力的影響作大幅度來回走動時，其運動一定不是簡諧。

道理很簡單，簡諧運動的加速度的大小值正比於離開平衡點的距離。當距離增大時，加速度就會比例倍大。但是曲線上粒子的切向加速增加至最盡亦不過是引力加速度 **g**， 它不可能會隨距離同比例增大。 無論曲線是甚麼數學形式，以上說法仍然成立。

2. 同學可能說以下的曲線又如何？



圖中曲線是 $y = ks^2$ **(k >0)**，其中 **s** 是由低點，沿曲線而上的距離。

動能 $T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$，動能 $V = mgy = mgks^2$，

其中 $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$。

Langrangian $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mgks^2$

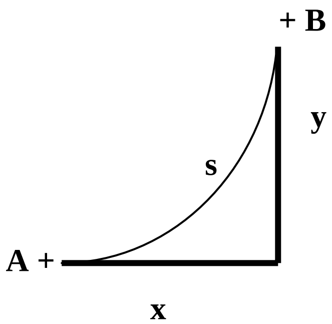
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}, \quad \frac{\partial L}{\partial s} = -2mgks, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s}$$

從 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$ 得 $m\ddot{s} + 2mgks = 0$

$\ddot{s} \propto -s$，這就是 **SHM**。

沒有錯，要做成無論大小振幅都是 **SHM**，唯一的曲線就是 $y = ks^2$。

但是，$y = ks^2$ 的曲線在離開原點遠處是不存在的。



- s $\geq$ AB = $\sqrt{x^2 + y^2}$， $\therefore s^2 \geq x^2 + y^2 > y^2$
- 因 $s > y$，當 $ks > 1$， $ks^2 > y$。
  (儘管 **k < 1**，但 s^2 增長快，所以 $ks^2 > y$)

製造一條 0 < y < ∞ 的 y = ks² 曲線不可能。

這亦即是對應先前的宣稱：「沒有一條曲線，可令粒子在其上運動，無論振幅如何都是 **SHM**」。

3. 曲線 **y = kx²** 不是 **y = ks²**。所以在曲線 **y = kx²** 上的運動一定不是 **SHM**。

那麼它的勢能 **mgy = mgkx²** 為何與 **SHM** 的 **PE =** $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 如此「相似」？

這個「相似」其實是一場誤會，一個誤解！

無疑， **SHM** 的 **PE** 是 $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，但這個 **x** 是甚麼？ 是粒子在擺動軌跡上離平衡點的距離，即是在 **(2)** 中所定義的 **s**； **x** 不是 **x** 軸的座標！

在單擺， 書本的確推出 **PE =** $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，而這個 **x** 又的確是 **x** 座標。但不要

忘記，這個推導中作了近似，是在小振幅才成立。

所以在大振幅時，曲線 y = kx^2 上的勢能 mgy = $mgkx^2$ 與真正是 SHM 的 PE = $mgks^2$ 比較一點也不相似。

4. 若問：「曲線 **y = kx^2** 上的勢能是 **$mgkx^2$**，而 **x** 是座標，那麼，粒子在 **x** 軸的投影又是否 **SHM**？」

不是 **SHM**，因為 **PE** 轉化為 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$，不是 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$。明顯的，粒子在 **x** 軸的投影不符合簡諧的性質。

從基本力學出發，可求得在引力作用下，物體沿平滑拋物形軌道 **y = kx^2** 上運動時所受的水平分力

$$F_x = -\frac{2mgkx(1+4k^2A^2)}{(1+4k^2x^2)^2} \qquad \text{................(*)}$$

其中的 **A** 是物體在最高位置時的 **x**。
明顯的，這不符合 **SHM** 的定義。

5. 只有當物體在拋物線 y = kx^2 的中央極低位置，運動才近似是 SHM。

假設 **$4k^2x^2$ << 1**，把 **(*)** 以 **x** 展開

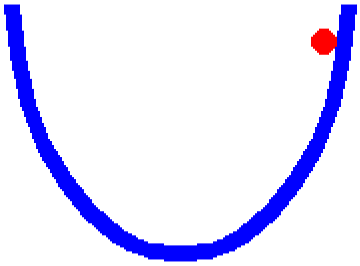
$$F_x = -m\omega^2 x(1-8k^2x^2+..........),\ \text{其中}\ \omega^2 = 2gk(1+4k^2A^2)$$

若捨去 k^2x^2 和它的高階項，$F_x = -m\omega^2 x$，其中 $\omega^2 = 2gk$ **(**因為 **x** 的最大為 **A**，所以 **$4k^2A^2$** 也一併捨去。**)**

[在接近原點，"y = kx^2" 和 "y=ks^2" 趨向相同]

推導時 (*) 需用 *y= f(x)* 的曲率半徑倒數 $\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

讀畢本文，不妨將重點重伸一次：



無論曲線是甚麼數學形式，粒子在其上受地心吸力的影響作大幅度來回走動時，其運動必不是簡諧。

http://www.ngsir.netfirms.com

C.K.Ng