問題：如圖所示，把一條質量均勻分佈的繩子兩邊固定。它中間部份下墜形成一曲線。

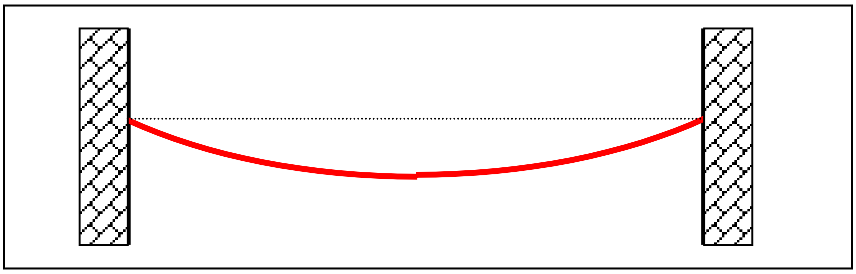
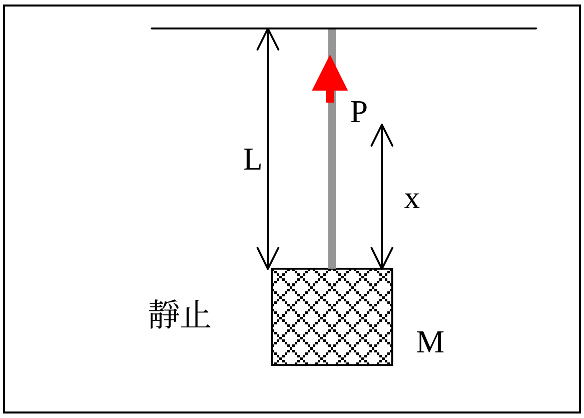


圖 **(i)**

(a) 為甚麼繩上的張力會隨位置而改變？
(b) 為甚麼每一點繩的張力的水平分量都是固定不改的？
(c) 你猜一下繩所形成的曲線是一個甚麼的方程。

(a) 因為繩有重量，所以繩上的張力會隨位置而改變。以下的簡單例子有助明白



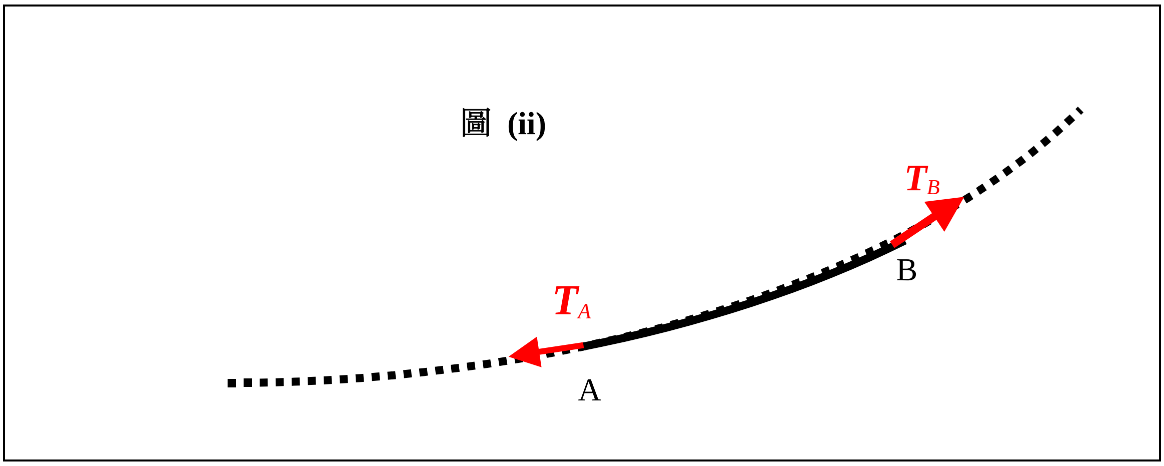
若繩沒有質量，繩上任何點的張力=**Mg**

現繩的質量為 **m**。明顯的，在 **P** 點的張力 = **P** 以下的總重量

= **Mg + mg(x/L)**

圖 **(i)** 的繩是彎曲的，但其物理相若。

(b) 繩上的張力會隨位置而改變，但每一點繩的張力的水平分量都是一樣。這是因為每一段繩所受的外力只是這一段繩向下的重量 。考慮以下 **AB** 的一截繩：



明顯的，AB 段的繩所受的力互相平衡抵消。

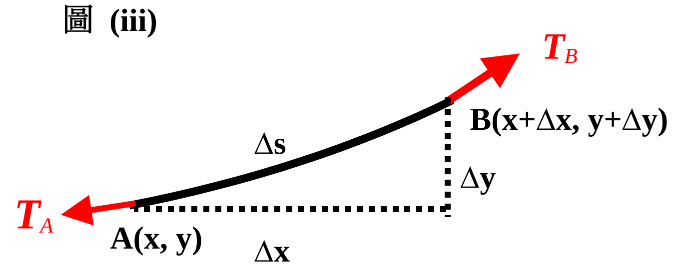
水平分量，$T_{Bx} - T_{Ax} = 0$ ----------------(1)

垂直分量，$T_{By} - T_{Ay} = m_{AB} g$ ，其中 m_{AB} 是 AB 段的質量。 -------------(2)

因為 (1)，加上 A、B 是繩上隨意選取的兩點，所以繩上張力的水平分量為一常數。

(c) 求繩形成的曲線的方程是一個大學程度的標準力學問題。這裡，我希望也可以介紹給高中同學一個認識。以下的討論涉及微積分。請同學忍耐。

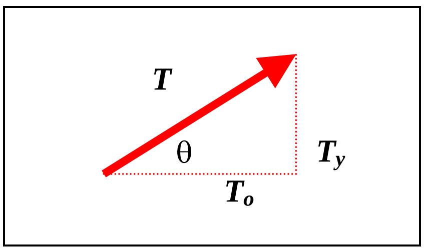
圖 (iii)



設 A 點的座標為 (x, y)；B 點的座標為 (x+ Δx, y + Δy)。

(2) 式 $T_{By} - T_{Ay} = m_{AB} g$

設 T_o 為每點均相同的張力的水平分量。所以任何點的張力的垂直分量 $T_y = T_o \tan\theta$，其中 θ 是在該點繩與水平的夾角。tanθ 亦即是曲線在該點的微分 y’。



參考圖 (iii)

$T_{By} = T_o y'(x+\Delta x)$ ------------(3)

$T_{Ay} = T_o y'(x)$ --------------(4)

如 A、B 兩點接近，AB 段繩的長度

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$ ----------------(5)

所以，**AB** 段繩的重量

$\boldsymbol{m_{AB}} = \dfrac{\Delta s}{L} mg$，其中 **L** 的繩的總長度，**m** 是它的總質量。--------------**(6)**

將 **(3)**，**(4)**，**(5)** 和 **(6)** 代入 **(2)**，得

$$T_o[y'(x+\Delta x) - y'(x)] = \frac{(\Delta x)mg}{L}\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}$$ 或

$$L\frac{T_o}{mg}[\frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta x}] = \sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2} \qquad \text{---------------(7)}$$

取極限 $\Delta x \to 0$ **(即 B→ A)**

(7) 變成

$$\boxed{b\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}} \qquad \text{--------------------(8)}$$

其中常數 $b = L\dfrac{T_o}{mg}$。

(8) 就是我們要找尋的微分方程。從 **(8)** 解出 **y**，就求出曲線的方程。

解 **(8)** 的方法很簡單，連做兩次積分便可。

設 $\dfrac{dy}{dx} = u$

由式 **(8)** 得

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{b}\int dx$$

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) + C = \frac{x}{b} \qquad \text{----------------(9)}$$

設當 **x = 0** 時，曲線在最低點， 所以 **u = 0**。求得積分常數 **C = 0**。

由 **(9)**，得

$$u=\frac{e^{x/b}-e^{-x/b}}{2}\text{，即 }\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x/b}-e^{-x/b}}{2}\quad\text{----------------(10)}$$

把 **(10)** 積分，最後求得答案

$$\boxed{y=\frac{b}{2}(e^{x/b}+e^{-x/b})}\quad\text{----------------(9)}$$

這就是固定繩子兩邊，它中間下墜所形成的曲線的方程。

最後，要指出的是曲線的方程不是甚麼拋物線方程，而是一個叫做 **"cosh"** 函數(註)的東西。

註：數學上，定義 **coshx = (e^x + e^{-x})/2**