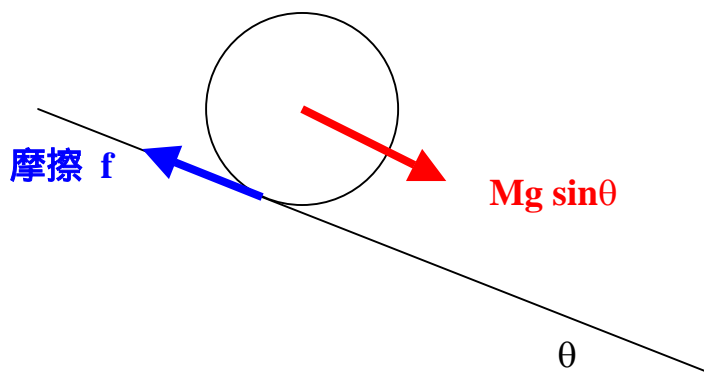


問題：

一輪子放在斜板上，由靜止開始滾下。若沒有發生滑動 (sliding)，摩擦有沒有作功？

分析：



平移運動公式：

$$\text{淨力 (net force)} = Mg \sin\theta - f$$

$$\text{加速 } a = \frac{Mg \sin\theta - f}{M}$$

由靜止滾下，沿斜板行走  $d$  的距離後，速度  $v = \sqrt{2ad}$ 。

● 平移動能 (translational KE) =

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Mad = Mgh - fd$$

其中  $h = d \sin\theta$ ，即是垂直下降的高度

把第 (1) 式略加整理，得

$$-fd = (0 - Mgh) + \left(\frac{1}{2}Mv^2 - 0\right) \quad \text{-----(1)}$$

式(1)的物理意義是

一如其他外力作的功，

摩擦對物體平移時作的功 =  $\Delta PE + \Delta KE_{\text{平移}}$ 。其中  $KE_{\text{平移}}$  是指平移動能 (translational kinetic energy)。

- 轉動公式

以圓中心為參考坐標，

$$\text{力矩 } \tau = fr$$

$$\text{角加速度 } \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{fr}{I}$$

由靜止滾下，沿斜板行走  $d$  的距離後，角速度  $\omega = \sqrt{2\alpha\theta}$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I(2\alpha\theta) = I\left(\frac{\tau}{I}\right)\theta ,$$

$$\tau\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 \quad \text{-----}(2)$$

式(2)的物理意義是

摩擦造成的力矩作的功 =  $\Delta KE_{\text{轉動}}$ ，其中  $KE_{\text{轉動}}$  是轉動動能 (rotational kinetic energy)。

輪子沒有滑動 (*slide*)，即  $\theta = \frac{d}{r}$ ，所以(2)亦可寫成

$$fd = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{.....}(3)$$

從 (1)、(2) 和 (3)，可知

- 摩擦在平移運動中作負功；同時，摩擦利用它造成的力矩，在轉動運動中作正功。就是這樣把從把勢能和平移動能中所取走的能量全部轉化為轉動動能。
- 消去 (1) 和 (3) 的  $fd$ ，得  $\Delta PE + \Delta KE_{\text{平移}} + \Delta KE_{\text{轉動}} = 0$ ，其意義是總機械能守恆。

- 若發生滑動 (*sliding*)， $\theta \neq \frac{d}{r}$ 。  
這時，式 (1) + 式 (2) =  $-f(d - r\theta) = -\text{摩擦} \times \text{滑動距離}$ ，它的絕對值就是損耗了的機械能 (即轉化成聲能和熱能)。  
若沒有發生滑動，這個功當然是零。

一般而言，在平移加滾動的複合運動中，『摩擦作功』這詞語是多種意義的：

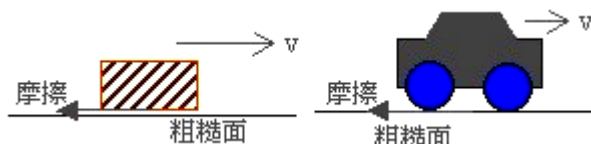
(A)	摩擦在平移中作的功	$\pm$ 摩擦 $\times$ 平移距離 *	代表引力勢能和平移動能的改變
(B)	摩擦在滾動中作的功	$\pm$ 摩擦造成的力矩 $\times$ 轉動角度 *	代表轉動動能的改變
(C)	摩擦在滑動中作的功	- 摩擦 $\times$ 滑動距離	代表總機械能的損失

\* 符號取決於摩擦與運動是同方向(+)或是反方向(-)。

若發生滑動，「摩擦」是指動摩擦；若沒有發生滑動，「摩擦」是指靜摩擦。

簡短的說「摩擦作的功」，見不得一定是指 (C)。請看以下兩個例子。

(i)



當一木塊在粗糙面上減速，動能的損失 = 克服摩擦作的功。

一輛汽車在馬路上減速，也是利用地面的摩擦。車子減速時，車輪與路面可以一直沒有發生滑動。我們對汽車也說「動能的損失 = 克服摩擦作的功」。

明顯的，這個「克服摩擦作的功」是 摩擦  $\times$  質心位移 [即上述的 (A)]。

(ii)

跳水運動員在起跳時把身體盡量伸展，在空中則把身體盡量屈曲。這是利用了角動量守恆定律，使身體在空中的轉速增加。

當角動量守恆，轉動動能是反比於轉動慣量 (moment of inertia)。即是說運動員在空中的轉動動能比起跳時增加。能量從何而來？會不會像圓筒從斜板滾下，是從引力勢能 (mgh) 部份轉移成轉動動能？

不是。比較兩種情況，不難指出運動員在空中就是沒有圓筒在斜板上有的摩擦力。摩擦是製造圓筒轉動加速的原因。

我們會說：「跳水運動員自己作功，把身體的部份化學能轉化成轉動動能。圓筒則是摩擦做功，把原有的部份勢能轉化成轉動動能」。這裡，「摩擦做功」是指上述的 (B)。

輪子在斜板上沒有滑動地滾下，摩擦有沒有作功？首要我們必須說清楚的是哪一種功。

## Center-of-Mass Work 和 Particle work :

美國物理教學月刊 “The Physics Teacher” 2005 年 1 月號中有一篇由美國海軍學院 Carl E.Mungan 撰寫的文章 “A primer on Work-Energy Relationships for introductory Physics” (<http://usna.edu/Users/physics/mungan/Publications/TPT6.pdf>) , 文中提及力學中有兩類的功 (work) :

1. **Center-of-Mass Work** — 是物體受到的 淨力 (net force) 和物體質心 (center of mass) 的位移 (displacement) 的標量積 (dot product)。

此 Center-of-Mass Work 等於物體平移動量 (translational KE) 的改變。

在之前有學者稱這 Center-of-Mass Work 為 **Pseudowork** [e.g. Penchina, Am.J.Phys. 46, 295(1978) ; B.A. Sherwood, Am.J.Phys.51, 597-602 (1983)] 。

但 Carl E. Mungan 說: “... has sometimes been called pseudowork in the literature, although I recommend against use of this name because it is not used in standard textbooks, and this form of work is no more a ‘false’ construct than is particle work...”

2. **Particle Work** — 是物體內所有粒子 (particle) 的功 (作用於這粒子的外力 (external force) 和這粒子的位移 (displacement) 的標量積 (dot product) 的總和 。

這 Particle work 亦被稱為 Real Work 或 External Work。

這 Particle work 等於物體的所有能量 (機械能和內能) 的改變。

圓筒在斜板滾下時, 沒有發生滑動。摩擦有沒有作功?

以 Center-of-Mass work 和 Particle Work 來理解

摩擦在 Center-of- Mass Work 中作的功不是零。

摩擦在 Particle Work 中作的功是零。此摩擦是靜摩擦, 其作用點沒有任何位移。

Center-of-work 和 Particle work( Pseudowork 和 Real work) 是力學中兩件有用的工具。有興趣的讀者可找 Mungan、Penchina 和 Sherwood 的幾篇文章來看看, 深入了解。